代数幾何学シンポジウム記録
1979年度 pp.217-240

Abel 多様体の双有理的特徴づけ

川又雄二郎

代数多様体 X の双有理不変量として小平次元 $\kappa(X)$ がある。$\kappa(X)$ は値 $-\infty, 0, 1, \cdots, \dim X$ をとり得るが、飯高の分類理論によれば、このうち $\kappa(X)=-\infty, 0$ 又は $\dim X$ となるような X が重要である。上の3種類の多様体はそれぞれ全く異った個性をもっている。$\kappa(X)=-\infty$ なる X には rational, ruled, uniruled, etc. がある。$\kappa(X)=\dim X$ なる X は general type とよばれこの場合は pluri-canonical ring $R \underset{\text{def}}{=} \bigoplus_{n\geq 0} H^0(X, nK_X)$ が重要となる。さて本論の目的は $\kappa(X)=0$ となるような X の構造を調べることにある。ここに次の上野による予想がある：

予想 K 「X は非特異射影的代数多様体で複素数体 $\mathbb{C}$ 上で定義されているとする。もしも $\kappa(X)=0$ ならば X の Albanese 写像 $\alpha: X \to A(X)$ は次の諸性質をみたす：

(1) αは代数的 fiber space になる，即ち，αは全射でそのファイバーは連結である。

(2) αの一般ファイバーをX_y $(y \in A(X))$とすると $\kappa(X_y)=0$。

(3) $A(X)$の étale 被覆 Bが存在して，fiber 積 $X \underset{A(X)}{\times} B$は$B$上で$F \times B$と双有理同値となる。ここで$F$はある一般 fiber X_y。』

この予想がもしも正しければ$\kappa(X)=0$なるXの分類は$\kappa(X)=0$かつ$q(X)=0$なるXの分類に帰着されることになる。ここに$q(X) \underset{\mathrm{def}}{=} \dim H^0(X, \Omega^1_X)$は不正則数。主な結果は：

<u>主定理</u>『上の予想Kのうちで(1)は正しい。また$q(X)=\dim X$又は$\dim X-1$ならば(2), (3)も正しい。』

<u>系</u>『$\kappa(X)=0$のとき$q(X) \leqq \dim X$である。また$q(X)=\dim X$となるのはαが birational であるときに限る。従って$\kappa(X)=0$かつ$q(X)=\dim X$が Abel 多様体の双有理的特徴づけ

を与える。』

本論では基礎体はいつも複素数体$\mathbb{C}$と仮定する。また詳しい話は拙著「Characterization of abelian varieties」を参照されたい。

さて，主定理の証明の戦略は次の図のとうりである：

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\text{定理1}} \Rightarrow \boxed{\text{定理2}} \\ \boxed{\text{主補題}} \Rightarrow \boxed{\text{定理3}} \end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{\text{主定理}}$$

まず次の定理1（Kawamata－Viehweg：On a characterization of an abelian variety の主定理）が突破口である。

定理1『X は正規射影代数多様体，A は Abel 多様体とする。$f: X \to A$ は全射でかつ有限とする。もし $\kappa(X)=0$ ならば f は étale である。』

これを使って上野の定理が拡張される：

定理2 「X は正規射影的代数多様体，A は Abel 多様体，$f: X \to A$ は有限射とする。（f は必ずしも全射ではない。）このときまず $\kappa(X) \geqq 0$ でありまた次のことが成立つ。即ち，A の Abel 部分多様体 B，X (resp. B) の étale 被覆 $\tilde{X}$ (resp. $\tilde{B}$)，正規射影的代数多様体 $\tilde{Y}$，有限射 $g: \tilde{Y} \to A/B$ が存在して，

(i) $\tilde{X} \simeq \tilde{B} \times \tilde{Y}$

(ii) $\kappa(\tilde{Y}) = \dim \tilde{Y} = \kappa(X)$.

代数的 fiber space $f: X \to Y$ とは X, Y が非特異射影的代数多様体，f が型射であって全射的かつ f の fiber が連結であるようなものを言う。次の飯高による「加法予想」は飯高の分類理論にとって基本的なものである。

予想 C 「$f: X \to Y$ を代数的 fiber space とする。このとき $\kappa(X) \geqq \kappa(Y) + \kappa(F)$。ここに F は f の一般ファイバーを表わす。」

「一般ファイバー」と言う言い方はかなりあいま

いではあるが、また便利なものでもある。我々は解析的方法と代数的方法そしてもちろん幾何学的方法といったものを全て機に応じて使っていくわけでそれに応じてその意味も微妙に異なってくるわけである。

さて上の予想Cは次の場合に正しいことがわかる：

(i) F が curve のとき（即ち $\dim F = 1$）

(ii) F が surface で $\kappa(F) \neq 2$ のとき

(iii) F が abelian variety のとき

(iv) Y が curve のとき

[redacted] (i) は Viehweg (iii) は Ueno による。(ii) と (iv) はこれから書かれる論文の主題となる。更に次の定理3も予想Cに対する1つの解答である。

<u>定理3</u>『$f: X \to Y$ を fiber space とする。もし $\kappa(X) \geq 0$ でかつ $\kappa(Y) = \dim Y$ であるならば $\kappa(X) = \kappa(Y) + \kappa(F)$ が成立つ。ここにFは一般ファイバー。』

定理3の証明は次の主補題をつかってなされる。これは藤田のアイデアを高次元に拡張したものである。

<u>主補題</u> 「$f: X \to Y$ は代数的 fiber space であって次の条件をみたすとする：

(i) Zariski 開部分集合 $Y_0 \subset Y$ があってその差額 $D = Y - Y_0$ は Y 上の正規交差因子。(ここではこれは代数的な意味にとる。即ち D の各既約成分が非特異でかつ transversal に交わっているとする。)

(ii) $X_0 = f^{-1}(Y_0)$, $f_0 = f|_{X_0}$ とおく。このとき f_0 は smooth。

(iii) $R^n f_{0*}\mathbb{C}_{X_0}$ は Y_0 上の局所系をなすが、このとき D のまわりをまわる局所モノドロミーは unipotent である。ここに $n = \dim X - \dim Y$。

上の条件の下に $f_* K_{X/Y}$ は局所自由層でかつ semi-positive (後述) である。ここに $K_{X/Y} \underset{\text{def}}{=} K_X \otimes f^* K_Y^{\otimes -1}$ は双対正準層。」

(これは $K_X - f^* K_Y$ とも書かれる)

一般に正規完備代数多様体 X 上の局所自由

層 V が semi-positive であるとは、任意の非特異射影的曲線 C と任意の型射 $\varphi: C \to X$ と任意の $\varphi^* V$ の商可逆層 Q に対して $\deg_C Q \geq 0$ が成立つことである。

主補題の証明には Griffiths, Deligne, Schmidt らによる抽象的 Hodge 構造の変型理論と混合 Hodge 構造の理論を用いる。即ち幾何学的な構造を線型化することによって抽象化し、最終的には Lie 群論にもっていくことになる。

さて本論の構成を述べよう。§1 では 定理 1 + 定理 3 ⇒ 主定理 を述べる。§2 では問題を unipotent なものに帰着させる。これはいわゆる「stable reduction」の線型化といえる。§3 では 主補題 ⇒ 定理 3 を述べる. §4 では主補題の証明を述べる。

我々の理論は X が compact Kähler 多様体のとき（従って複素トーラスの特徴づけ）と非完備代数多様体のとき（従って quasi-abelian variety の特徴づけ）に拡張できる

がそれらについてはここでは述べない。

§1　分類理論

飯高・上野等による分類理論については上野による Springer Lecture Note nº439 を参照されたい。

（定理2の証明）$\Phi : X^* \to Y^*$ を X の飯高ファイバリングとする。（即ち X^* は X と birational，Φ はファイバー空間，$\kappa(X) = \dim Y$，Y^* の部分集合 U があって $X^*_y \underset{\mathrm{def}}{=} \Phi^{-1}(y)$ $(y \in U)$ について $\kappa(X^*_y) = 0$．$Y^* - U$ は Y^* の真部分多様体の可算和。）B_y $(y \in U)$ を X^*_y の A での像とすると $\kappa(B_y) = 0$ であるから B_y は A のある Abel 部分群を平行移動したものになる。A の Abel 部分群は高々可算個しかないから U の Zariski 稠密な部分集合 U' が存在して全ての B_y $(y \in U')$ は A のある1つの Abel 部分群 B の平行移動になっていることがわかる。このことから型射 $X^* \to A$ が型射 $Y^* \to A/B$ を誘導することがわかる。ポア

ニカしの定理を使うと，適当なétale被覆にとりかえることにより $A = A/B \times B$ と仮定してよい。Y を A/B の $\mathbb{C}(Y^*)$ 内での正規化とすると，Φ は型射 $\Phi_1 : X \to Y$ を誘導することがZariskiの主定理よりわかる。Φ_1 の一般ファイバーは定理1により B 上étaleになる。従ってあるAbel多様体 $\widehat{B}$ と同型になる。このとき $\widetilde{A} = A/B \times \widehat{B}$, $\widetilde{X} = X \times_A \widetilde{A}$ とおく。$\widetilde{Y}$ を A/B の $\mathbb{C}(\widetilde{X})$ 内での正規化とすると，$\widetilde{X} = \widetilde{Y} \times \widehat{B}$ となる。このとき $\kappa(\widetilde{Y}) = \kappa(\widetilde{X}) = \dim Y = \dim \widetilde{Y}$ となり定理が証明された。(証終)

(定理2 + 定理3 $\Rightarrow$ 主定理　の証明)

主定理の後半の部分で $q(X) = \dim X$ のときは前半の部分の簡単な系である。一般に後半の部分は（前半を仮定したあと），fiber space $\alpha : X \to A(X)$ が次のような状況になっていることを示せばよい：α の一般ファイバーは全て同型でかつ κ が 0 である。これは $q(X) = \dim X - 1$ のときは Viehweg による加法定理（ファイバー

が曲線の場合）より出る。詳しくは初めに掲げた拙論に譲り我々は前半の証明のみを扱うことにする。

さて α の像を Z_0 とし，その $\mathbb{C}(X)$ での正規化を Z とする。定理2より適当なétale被覆によるとりかえの後（これは κ に影響しない）$Z = Y \times B$，$\kappa(Y) = \dim Y$，B はAbel多様体とできる。ここに定理3を $X \to Y$ に適用すると $\dim Y = 0$ が出る。即ち Z はAbel多様体となる。α の普遍性から $Z = A(X)$ となる。（証終）

§2. Unipotentへの帰着

定理4 「X は射影的非特異代数多様体，D は X 上の正規交差因子とする。（即ち，$D=\sum_{i=1}^{N} D_i$ を D の既約分解とすると，各 D_i は非特異でかつ互に直交しているとする。）各 D_i に自然数 m_i を付与しておく。このとき射影的非特異代数多様体 $\tilde{X}$ が存在して次の条件をみたす：

(1) 有限全射的型射 $p : \tilde{X} \to X$ が存在する。

(2) $\widehat{D} \underset{\mathrm{def}}{=} p^{-1}(D) \underset{\mathrm{def}}{=} (p^*(D))_{red}$ は $\widetilde{X}$ 上の正規交叉因子。

(3) $\widehat{D_i} = p^{-1}(D_i)$ とし，$\widehat{D_i} = \sum m_{ij} D_j'$ を既約分解とすると，$m_i | m_{ij}$ $(\forall i, j)$ となる。」

(証明) 有限全射的型射の列

$$\widetilde{X} = X_N \xrightarrow{p_N} X_{N-1} \xrightarrow{p_{N-1}} \cdots \xrightarrow{p_2} X_1 \xrightarrow{p_1} X$$

を次のように順次構成する。M を X 上の豊富層とする。m を m_1 の十分大きな倍数で $mM - D_1$ がとても豊富 (very ample) であるようなものとする。$d = \dim Y$ とし，$H_1, \cdots, H_d$ を $|mM - D_1|$ の一般元で $\sum_{k=1}^{d} H_k + D$ が正規交叉になるようなものとする。$\mathcal{U} = \{U_i\}$ を X の affine 開集合による被覆とし，a_{ij} をそれによる M の変換関数系とする。$H_k + D_1$ の U_i における局所方程式 $\varphi_{k,i}$ で $\varphi_{k,i} = a_{ij}^m \varphi_{k,j}$ となるものをとる ($1 \leqq k \leqq d$)。このとき体 $\mathbb{C}(U_i)(\sqrt[m]{\varphi_{1,i}}, \cdots, \sqrt[m]{\varphi_{d,i}})$ は i に依存しない。これを L と書き，X の L 内での正規化を X_1 としよう。これから X_1 が非特異であることを示す。各 $x \in X$ に対

して $X_1 \times \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}$ が非特異であることを見ればよい。ここで $\bigcap_{k=1}^{d} H_k \cap D_1 = \phi$ に注意する。だから次の2つの場合が考えられる：

(イ) $x \in D_1$, $x \in H_k : k=1,\cdots,e$, $x \notin H_k\ k=e+1,\cdots,d, e<d$

(ロ) $x \notin D_1$, $x \in H_k ; k=1,\cdots,e$, $x \notin H_k : k=e+1,\cdots,d$.

(イ)の場合は $\varphi_{d,i}, \varphi_{1,i}/\varphi_{d,i}, \cdots, \varphi_{e,i}/\varphi_{d,i}$ が x の正則パラメーター系の一部となり $\varphi_{e+1,i}/\varphi_{d,i}, \cdots, \varphi_{d-1,i}/\varphi_{d,i}$ は単関数（x で 0 でない）。(ロ)の場合は $\varphi_{1,i}, \cdots, \varphi_{e,i}$ は x の正則パラメータ系の一部となり，$\varphi_{e+1,i}, \cdots, \varphi_{d,i}$ は x で 0 でない。こうして X_1 の非特異性が言える。作り方より $X_1 \xrightarrow{p_1} X$ は D_1 で m 重に分岐している。一方上の非特異性の証明を各成分 $D_i\ (i \geq 2)$ に適用すると $p_1^{-1}(D_i)\ (i \geq 2)$ は非特異でかつ $p_1^{-1}(D)$ は正規交叉であることがわかる。次に上の構成を $p_1^{-1}(D_2)$ に対して行う。これは既約ではないが非特異であるので上の D_1 と同じような操作が可能なのである。こうして次々と分岐被覆を作っていって $\tilde{X}$ を得る。尚 $\tilde{X}$ は D 以外のところでもたくさん分岐している。（証終）

系「$f: X \to Y$ を代数的 fiber space とする。このとき X, Y の birational model をとりかえるとき次のことが成立する：代数的 fiber space $\tilde{f}: \tilde{X} \to \tilde{Y}$ が存在して

(1) 有限全射的型射 $g: \tilde{Y} \to Y$ が存在

(2) $\tilde{X}$ は $X \times_Y \tilde{Y}$ のある非特異モデル

(3) $\tilde{f}: \tilde{X} \to \tilde{Y}$ は主補題の条件(i)〜(iii)をみたす。」(モロドロミー定理より。)

§3. 加法定理

(主補題 ⇒ 定理3 の証明)

初めに $p_g(X) \neq 0$ と仮定してよいことを示す。(藤田の議論) $P_m(X) \neq 0$ なる $m \in \mathbb{N}$ をとる。$0 \neq \omega \in H^0(X, mK_X)$ をとる。$\mathcal{U} = \{U_i\}$ を X の affine open 部分集合による被覆とし、a_{ij} をこれに対する K_X の変換関数系とする。φ_i を U_i 上の関数で ω を表示し、しかも $\varphi_i = a_{ij}^m \varphi_j$ on $U_i \cap U_j$ となるものとする。このとき $X_i \underset{def}{=} \{(x,t) \in U_i \times \mathbb{C} ;\ \varphi_i(x) = t^m\}$

とする。このとき $x\in U_i\cap U_j$ に対して

$$(x,t)\in X_j \iff (x,\ a_{ij}t)\in X_i$$

が成立つから X_i 達は代数多様体 K_X（全空間）の部分多様体を定める。X^*をその１つの成分の非特異化とする。このとき $\pi: X^*\longrightarrow X$ は高々 ω の零因子で分岐しているので 分岐因子 $R_\pi \underset{\mathrm{def}}{=} K_{X^*}-\pi^*K_X \leqslant n\pi^*K_X$ となるような $n\in\mathbb{N}$ が存在する。従って $\kappa(X)=\kappa(X^*)$。また関数 $(x,t)\longmapsto t$ は π^*K_X の切断を誘導するので $p_g(X^*)\neq 0$。Y^*をYの $\mathbb{C}(X^*)$ 内での正規化とする。適当に非特異モデルをとりかえると次の図を得る：

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f^*"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y^* \arrow[r, "\pi_0"'] & Y \end{tikzcd}$$

Y, Y^*の一般点 y, y^*を $\pi_0(y^*)=y$ となるようにとり一般ファイバー $F=X_y=f^{-1}(y)$, $F^*=X^*_{y^*}=f^{*-1}(y^*)$を考える。$\pi|_{F^*}: F^*\longrightarrow F$ の存在より $\kappa(F^*)\geqslant\kappa(F)$ が出る。また $\kappa(Y^*)\geqslant\kappa(Y)$ だから定理の主張を証明には $\kappa(X^*)\geqslant\kappa(F^*)+\kappa(Y^*)$

を言えばよいことになる。（注：逆方向の不等号は"easy addition"：$\kappa(X) \leq \kappa(X_y) + \dim Y$ より出る。）こうして $p_g(X) \neq 0$ を仮定してよいことがわかった。$0 \neq \omega \in H^0(X, K_X)$ とし，y を Y の一般点とすると，$F = X_y = f^{-1}(y)$ に adjonction formula を適用して $\omega|_F \in H^0(F, K_F)$ を得る。従って $p_g(F) \neq 0$.

定理4の系を使うと次の図を得る

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "\mu"] \arrow[drr, "\tilde{f}"'] & X \times_Y \tilde{Y} \arrow[r, "p"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ & \tilde{Y} \arrow[r, "q"] & Y \end{tikzcd}$$

主補題を使うと $\tilde{f}_* K_{\tilde{X}/\tilde{Y}}$ は semi-positive な自由層となる。その階数は $p_g(F)$ である。

L を $\tilde{Y}$ 上のとても豊富な可逆層とする。このとき $m \in \mathbb{N}$ が存在して $\mathrm{Hom}_{\tilde{Y}}(L, mq^*K_Y) \neq 0$ となる（小平の補題）。これを証明する。M を L によって定まる $\tilde{Y}$ の一般切断とする。このとき次の完全系列を得る：

$$0 \to H^0(\tilde{Y}, mq^*K_Y - L) \to H^0(\tilde{Y}, mq^*K_Y) \to H^0(M, mq^*K_Y|_M)$$

$\kappa(\tilde{Y}, q^*K_Y) = \dim Y$ であるから第2項の次元は $m^{\dim Y}$ の order で増大する。一方第3項は $\dim M = \dim Y - 1$ であるので高々 $m^{\dim Y - 1}$ の order しかない。よって第一項は十分大な m で零でない。

さて証明を続行しよう。q は平担であるから $K_{X \times_Y \tilde{Y}/\tilde{Y}} = p^* K_{X/Y}$ である。また μ は双有理であるから $Hom(\mu_* K_{\tilde{X}}, K_{X \times_Y \tilde{Y}}) \neq 0$ である。従って $\kappa(X) = \kappa(\mu^* p^* K_X, \tilde{X}) = \kappa(\mu^* K_{X \times \tilde{Y}/\tilde{Y}} + \tilde{f}^* q^* K_Y, K_{\tilde{X}}) \geq \kappa(\mu^* \mu_* K_{\tilde{X}/\tilde{Y}} + \tilde{f}^* q^* K_Y, \tilde{X})$ である。ここで $P = \mathbb{P}(\tilde{f}_* K_{\tilde{X}/\tilde{Y}})$ とし $\pi : P \to \tilde{Y}$ を射影, H を P 上の普遍的直線束とする。まず H が semi-positive であることを示す。即ち C を P 上の任意の曲線とするとき $H \cdot C \geq 0$. $\nu : C^* \longrightarrow C$ を特異点解消とすると π は型射 $\varphi : C^* \longrightarrow \tilde{Y}$ を誘導する。また $\nu^* H$ は $\varphi^* \tilde{f}_* K_{\tilde{X}/\tilde{Y}}$ の商可逆層 Q を与える。従って $\deg_{C^*} \nu^* H = H \cdot C \geq 0$ である。

Seshadri's の判定条件 : S は完備代数多様体 D は S 上の Cartier因子とする。このとき D が

豊富である必要十分条件は正数 $\varepsilon > 0$ が存在して S 上の任意の曲線 C に対して $D \cdot C \geq \varepsilon m(C)$ となることである。ここで $m(C) = \max_{p \in C} m_p(C)$ (重複度)。

これを使うと L が $\tilde{Y}$ 上で豊富であることより $mH + \pi^* L$ が P 上で豊富であることが出る。

準同型 $\mathrm{Sym}_{\tilde{Y}}\, \tilde{f}_* K_{\tilde{X}/\tilde{Y}} \longrightarrow \sum_{n \geq 0} \tilde{f}_*(n K_{\tilde{X}/\tilde{Y}})$ は P の部分概型 R で $\pi|_R : R \to \tilde{Y}$ が全射であるようなものを誘導する。$\dim Y > 0$ と仮定するとき $y_1 \neq y_2$ を $\tilde{Y}$ 上の2点, $r_1 \neq r_2$ を R 上の2点で $\pi(r_1) = y_1$, $\pi(r_2) = y_2$ となるようなものとする。$mH + \pi^* L$ は豊富であるから十分大きな n をとるとき次のような $n(mH + \pi^* L)$ の切断 s_1, s_2 が存在する: $s_1|_{\pi^{-1}(y_1)} = 0$ & $s_1(r_2) \neq 0$, $s_2|_{\pi^{-1}(y_2)} = 0$ & $s_2(r_1) \neq 0$. このとき
$H^0(P, n(mH + \pi^* L)) = H^0(\tilde{Y}, \mathrm{Sym}_{\tilde{Y}}^{nm} \tilde{f}_* K_{\tilde{X}/\tilde{Y}} \otimes nL)$
であるから s_1, s_2 は $\tilde{f}_*(nm K_{\tilde{X}/\tilde{Y}}) \otimes nL$ の切断 ω_1, ω_2 で $\omega_1(y_1) = 0$, $\omega_1(y_2) \neq 0$, $\omega_2(y_2) = 0$, $\omega_2(y_1) \neq 0$ なるものを誘導する。従って

$\kappa(\mu^*\mu_* K_{\tilde{X}/\tilde{Y}} + \tilde{f}^* g^* K_Y, \tilde{X}) = \kappa(nm\mu^*\mu_* K_{\tilde{X}/\tilde{Y}} + nm\tilde{f}^* g^* K_Y, \tilde{X}) \geq \kappa(nm\mu^*\mu_* K_{\tilde{X}/\tilde{Y}} + n\tilde{f}^* L, \tilde{X}) > 0$, よって $\kappa(X)>0$.

$\Phi : X \longrightarrow Z$ を X の Iitaka fibering とする。$G = \{(y,z) \in Y\times Z ;\ \exists x \in X \text{ s.t. } y=f(x),\ z=\Phi(x)\}$ とおく。Z を一般超平面切断でどんどん切っていくと、その結果を Z' と書くとき、$Y^* \underset{\mathrm{def}}{=} G \times_Z Z'$ は Y 上 generically finite で dominating になる。$\kappa(Y)=\dim Y$ だから $\kappa(Y^*)=\dim Y^*$ である。代数的 fiber space $Y^* \longrightarrow Z'$ の一般ファイバーは丁度 $f(X_z)$ $(z\in Z')$ である。従って easy addition より $\kappa(f(X_z)) = \dim f(X_z)$ が一般の z について成立する。上の議論を代数的ファイバー空間 $f|X_z : X_z \longrightarrow f(X_z)$ に適用しよう。もしも $\dim f(X_z)>0$ ならば $\kappa(X_z)>0$ となって矛盾が出る。従って $f(X_z)$ は点である。従って次の図のように f は分解する：

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] \arrow[r, "\Phi"] & Z \arrow[dl, "g"] \\
Y &
\end{tikzcd}
$$

easy addition より $\kappa(F) \leqq \dim \Phi(F)$。従って
$\kappa(X) = \dim Z = \dim \Phi(F) + \dim Y \geqq \kappa(F) + \kappa(Y)$
を得る。こうして証明が終った。

§4. 半正値性

Schmidt : Variation of Hodge structures (Inv. Math. 22) の結果の引用から始める。

(1) (P.234) $\mathcal{H}_0 = (R^n f_{0*} \mathbb{C}_{X_0})_{prim} \otimes \mathcal{O}_{Y_0}$
$\mathcal{F}_0 = f_{0*} K_{X_0/Y_0}$ とおく。ここに prim とは primitive part を示す。$n = \dim X - \dim Y$ である。$\mathcal{H}_0$ はいわゆる Hodge filtration $\{F^p\}_{0 \leqq p \leqq n}$ をもち $\mathcal{F}_0 = F^n(\mathcal{H}_0)$ となる。$\mathcal{H}_0$ は Y 上の自由層 $\mathcal{H}$ に標準的に延長される。これは局所的には次のように記述できる: $\mathcal{H}_0$ の局所切断 s をとり $\mathcal{H}$ の多値平坦切断 s_i を使って $s = \sum f_i s_i$ と表わす。ここに f_i は多価関数である。このとき s が境界 D を超えて $\mathcal{H}$ の切断に延長される条件は各 f_i が D で対数的特異点のみをもつことである。(ここで s_i は一次独立にとったとする。)
しかもその上 filtration $\{F^p\}$ は $\mathcal{H}$ へ延長される。

$\mathcal{F}=F^n(\mathcal{H})$ とおこう。このとき $\mathcal{F}=f_*K_{X/Y}$ が成立する。証明：$s=\sum f_i s_i$ を $\mathcal{F}_0$ の局所切断とする。このとき $I_t \underset{\mathrm{def}}{=} \int_{X_t} s\wedge\bar{s} = \sum a_{ij} f_i \bar{f_j}$ ここに $a_{ij}=\int_{X_t} s_i\wedge\bar{s_j}$ は定数。従って $\int_t I_t\,dt\,d\bar{t} < +\infty$ となるのは f_i が対数的特異性をもつときと一致する。従ってこの結果が出る。

(2) (§6) D_1 を D の1つの既約因子とし $D_1^0 = D_1-(D-D_1)^{cl}$ とおく。ここに cl は閉包。U を D_1 の小さな近傍とし $U^0=U-(D-D_1)^{cl}$ とおく。D_1 のまわりをまわる $\mathcal{H}|_{U-D}$ のモノドロミー γ_1 は共役を除いて定まる。このとき $\mathcal{H}|_{U-D}$ の増大 *filtration* $\{W_\ell\}_{0\le\ell\le 2n}$ が存在して次の条件をみたす：

(i) $N(W_\ell)\subset W_{\ell-2}$, ここに $N=\log\gamma_1$ (unipotent だから有限和)

(ii) $N^\ell : Gr^W_{n+\ell}(\mathcal{H}|_{U-D}) \xrightarrow{\sim} Gr^W_{n-\ell}(\mathcal{H}|_{U-D})$ $(\ell\geq 0)$.

$Gr^W(\mathcal{H}|_{U-D})$ 上では $\gamma_1\equiv 1$ だから $\{W_\ell\}$ は $\mathcal{H}|_{U^0}$ 上に延長され $Gr^W(\mathcal{H}|_{U^0})$ は Gauß-Manin connection から誘導された *flat connection*

をもつ。このとき $\mathcal{H}|_{D_1^0}$ 上の２つの filtration $\{W_\ell\}, \{F^p\}$ はいわゆる mixed Hodge structure を定める。即ち $\{F^p\}$ は $Gr^W(\mathcal{H}|_{D_1^0})$ 上に polarization なしの variation of Hodge structures を定める。
ここで $P_\ell^0 = \ker(N^{\ell-n+1} : Gr_\ell^W(\mathcal{H}|_{D_1^0}) \to Gr^W_{2n-\ell-2}(\mathcal{H}|_{D_1^0}))$ とおこう ($\ell \geq n$)。$\ell < n$ のときは $P_\ell^0 = 0$ とおく。
更に $\tilde{u}, \tilde{v} \in P^0_{\ell,y}$ ($y \in D_1^0$) に対して $S_\ell(\hat{u}, \hat{v})$ を次のように定義する：$W_\ell(\mathcal{H}|_{U-D})$ の flat section (多価) u, v で $\tilde{u}, \tilde{v}$ を通る $Gr_\ell^W(\mathcal{H}|_{U^0})$ の flat section を誘導するようなものをとる。そして $S_\ell(\tilde{u}, \tilde{v}) = S(u, v)$ とおく。こうして P_ℓ^0 は polarization S_ℓ 付の variation of Hodge structures となる。(1)の方法によって P_ℓ^0 と $W_\ell(\mathcal{H}|_{D_1^0})$ は D_1 上の局所自由層 P_ℓ と $W_\ell(\mathcal{H}|_{D_1})$ に延長される。これらは互に両立する。更に $Gr_\ell^W(\mathcal{F}|_{D_1}) = F^n(P_\ell) \subset P_\ell$ がわかる。

さて主補題の証明に移ろう。主補題の後に述べた記号 C, φ, Q を用いる。

(i) $\varphi(C) \cap Y_0 \neq \phi$ と仮定する。$\mathcal{F}_0$ 上の正定値 Hermite 構造を $h(u,v) = S(u, \bar{v})$, $u, v \in \mathcal{F}_{0,y}$

$y\in Y_0$ で導入する。$C_0=\varphi^{-1}(Y_0)$ とおく。このとき $Q|C_0$ は誘導された metric h_Q をもつ。Griffiths によればこのとき h_Q の曲率 Θ_Q は非負である。一方下記の補題における α_p $(p\in C-C_0)$ は全て 0 であることがわかる。従って $\deg_C Q\geq 0$ が出る。

補題『C は非特異射影曲線，L は C 上の直線束，$C_0\subset C$ は Zariski 稠密開集合とする。h は L/C_0 上の hermitian metric とし，t_p を $p\in C-C_0$ を中心とする C の局所座標とする。L の p の近くの局所切断 v_p で $v_p(p)\neq 0$ なるものに対して $h(v_p,v_p)=O(|t|^{-2\alpha_p}|\log t|^{\beta_p})$ $(\alpha_p,\beta_p\in\mathbb{R})$ とする。このとき

$$\deg_C L=\frac{i}{2\pi}\int_{C_0}\Theta+\sum_{p\in C-C_0}\alpha_p$$

ここに Θ は h の曲率で積分は広義積分とする。』

(証明)（藤田による）p の小さな近傍 $U_p=\{x\,;\,|t_p(x)|\leq\varepsilon\}$ をとり h を U_p 内でとりかえて C^∞ な h_p を作る。Θ' をこの新しい metric に対応する曲率とする。このとき

$$\deg_C L = \frac{i}{2\pi}\int_C \Theta' = \frac{i}{2\pi}\int_{C-\bigcup_p U_p} \Theta + \sum_{p\in C-C_0} \int_{U_p} \frac{i}{2\pi}\Theta'$$

Stokesの定理より

$$\frac{i}{2\pi}\int_{U_p}\Theta' = \frac{i}{2\pi}\int_{\partial U_p} \partial \log h(v_p, v_p)$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\partial U_p} \frac{\partial \log h(v_p, v_p)}{\partial \log r} d\theta,$$ ここに

$t^p = re^{2\pi i\theta}$ とおいた。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial U_p} \frac{\partial \log h}{\partial \log r} d\theta = -2\alpha_p$$

だから上の公式を得る。(証終)

(ii) $\varphi(C) \subset D_1$ でかつ $\varphi(C) \cap D_1^0 \neq \phi$ と仮定する。このとき $\varphi^*\mathcal{F} \to Q$ はある ℓ に対して 0 でない準同型 $\varphi^* Gr_\ell^W(\mathcal{F}|D_1) \to Q$ を誘導する。Q' をこの像としよう。(i) の議論を $\mathcal{F} = F^n(\mathcal{H})$ と $\mathcal{H}$ のかわりに $Gr_\ell^W(\mathcal{F}|D_1) = F^n(\mathcal{P}_\ell)$ と $\mathcal{P}_\ell$ に適用すると $\deg_C Q' \geq 0$ を得る。従って $\deg_C Q \geq 0$ である。

(iii) D_2 を D のもう1つの既約因子とし D_{12}

$=D_1 \cap D_2$ とおく。$D_{12}^{\circ}=D_{12}-(D-D_1-D_2)^{cl}$ としよう。そして $\varphi(C)\subset D_{12}$ でかつ $\varphi(C)\cap D_{12}^{\circ}\neq\phi$ と仮定する。このときある l について $\varphi^{*}Gr_{l}^{W}(\mathcal{F}|_{D_1})\longrightarrow Q$ は 0 でない準同型であった。Q' をその像とする。(ii) の議論を今度は $\mathcal{H}, \mathcal{F}, \gamma_1$ のかわりに $\mathcal{H}_l, Gr_l^W(\mathcal{F}|_{D_1}), \gamma_2$ に適用する。ここに γ_2 は D_{12} のまわりをまわる局所モノドロミーである。こうして $\deg_C Q'\geqq 0$ を得る。

帰納的に C の像の分類によって証明が完結する。(証終)